Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

MA-1112 —Practica: semana 1 y/o 2 —

Ejercicios sugeridos para la semana 1 y/o 2. Cubre el siguiente material: Antiderivadas, Integral indefinida (incluyendo funciones trigonométricas y sus inversas), Introducción al área, notación sigma, área por medio de polígonos inscritos y circunscritos.

1. Recordando las derivadas de varias funciones estudiadas en el curso de MA-1111, halle una antiderivada para cada una de las siguientes:

   a) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   Solución: $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + C$.

   b) $x^{1/3} + x^{-1/3} + \frac{1}{1+4x^2}$.
   Solución: $\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{x^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} + \frac{\arctan(2x)}{2} + C$.

   c) $-\pi\cos(\frac{\pi x}{2}) - \sec(x)\tan(x)$.
   Solución: $-\frac{\pi x}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) - \sec(x) + C$.

   d) $-\csc(5t)\cot(5t) + \frac{3}{2}t^{-5/2} + t^2 + 5t - 8$.
   Solución: $\frac{\csc(5t)}{5} - t^{\frac{-5}{2}+1} + \frac{t^{2+1}}{2+1} + \frac{5t^2}{2} - 8t + C$.

2. Halle las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\int \left(\sqrt[5]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.
   Solución:

$$\begin{aligned}\int \left(\sqrt[5]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)dx &= \int \sqrt[5]{x}dx + 2\int \sqrt[3]{x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + 2\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(x) + C.\end{aligned}$$

   b) $\int \frac{\sqrt{\arctan(x)}}{1+x^2}dx$.
   Solución: Utilizando el cambio de variable $u = \arctan(x)$, tenemos que $du = \frac{1}{1+x^2}dx$. Asi,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\arctan(x)}}{1+x^2}dx &= \int \sqrt{u}du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \frac{\arctan(x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C.\end{aligned}$$

c) $\int \frac{3\,\text{sen}^2(x)\cos(x)}{(7-\text{sen}^3(x))^2}dx$.
Solución: Considerando el cambio de variable $t = 7 - \text{sen}^3(x)$, tenemos que $-dt =$

$3\,\text{sen}^2(x)\cos(x)dx$ y

$$\int \frac{3\,\text{sen}^2(x)\cos(x)}{(7-\text{sen}^3(x))^2}dx = -\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{7-\text{sen}^3(x)} + C.$$

d) $\int \tan^2(x)dx$ (Sugerencia: recuerde que $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$).
Solución:

$$\begin{aligned} \int \tan^2(x)dx &= \int(\sec^2(x)-1)dx = \int \sec^2(x)dx - \int dx \\ &= \tan(x) - x + C. \end{aligned}$$

e) $\int y\sqrt{1-y}dy$ (Sugerencia: utilice el cambio de variable $1 - y = u$).
Solución: Utilizando el cambio de variable $1 - y = u$, tenemos que $-dy = du \Rightarrow dy = -du$ y $y = 1 - u$. Asi,

$$\begin{aligned} \int y\sqrt{1-y}dy &= -\int(1-u)\sqrt{u}du = -\int \sqrt{u}du + \int u\sqrt{u}du \\ &= -\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \int u^{\frac{1}{2}+1}du \\ &= -2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{5} \\ &= 2\left(-\frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{(1-y)^{\frac{5}{2}}}{5}\right) + C \end{aligned}$$

f) $\int \frac{3x^2}{x^2+1}dx$ (Sugerencia: $3x^2 = 3x^2 \pm 3$).
Solución:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2}{x^2+1}dx &= \int \frac{3x^2+3-3}{x^2+1}dx = 3\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx \\ &= 3\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = 3\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\ &= 3\left(\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\right) = 3x + 3\arctan(x) + C. \end{aligned}$$

3. Halle la integral indefinida de cada una de las siguientes funciones (de manera que sea una primitiva continua):

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & x < 1 \\ 5, \quad \text{sí} & 1 < x < 2 \\ 3x^2 - 2x & x > 2 \end{cases}$
Solución:

$\int f(x)dx = F(x)+C$ donde $F(x) = \begin{cases} x^2-2x+C_1, & x<1 \\ 5x+C_2, & \text{sí} \quad 1<x<2 \\ x^3-x^2+C_3 & x>2 \end{cases}$ con $C, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$-1+C_1 = 5+C_2$$
$$10+C_2 = 4+C_3$$

Ya que para ser una primitiva continua debe satisfacer: $\lim_{x\to a^-} F(x) = \lim_{x\to a^+} F(x) = F(a)$, para $a=1$ y $a=2$.

Una posible solución es: $F(x) = \begin{cases} x^2-2x+6, & x\leq 1 \\ 5x, & \text{sí} \quad 1<x<2 \\ x^3-x^2+6 & x\geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) =\mid 3x^2-3 \mid$.
Solución:
$\int f(x)dx = F(x)+C$ donde $F(x) = \begin{cases} x^3-3x+C_1, & x\leq -1 \\ -x^3+3x+C_2, & \text{sí} \quad -1<x<1 \\ x^3-3x+C_3 & x\geq 1 \end{cases}$ con $C, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$2+C_1 = -2+C_2$$
$$2+C_2 = -2+C_3$$

Una posible solución es: $F(x) = \begin{cases} x^3-3x, & x\leq -1 \\ -x^3+3x+4, & \text{sí} \quad -1<x<1 \\ x^3-3x+8 & x\geq 1 \end{cases}$

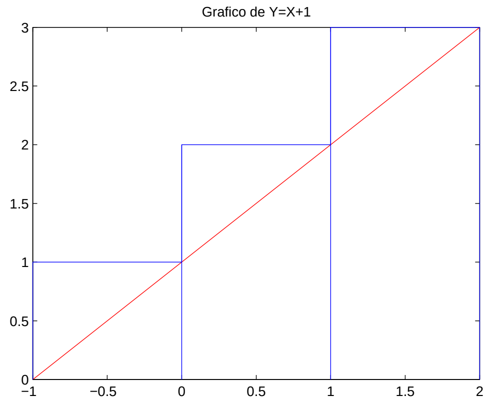
4. Haga el bosquejo de la gráfica de la función que se da en el intervalo $[a,b]$; después divida $[a,b]$ en n subintervalos iguales. Calcule el área del correspondiente polígono circunscrito para varios valores de n ($n=3,4,5,\ldots$), por último haga $n\to\infty$.

   a) $f(x) = x+1$; $a=-1$ y $b=2$.
   Solución:

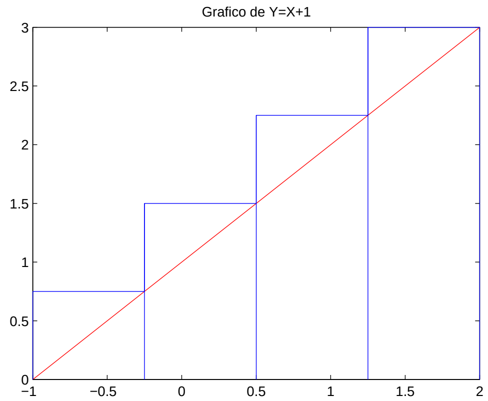
   Podemos aproximar el área bajo la gráfica $y = x+1$ para los $-1\leq x\leq 2$, utilizando polígonos circunscritos y considerando como:

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}| = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}, \forall i, 1\leq i\leq n.$$

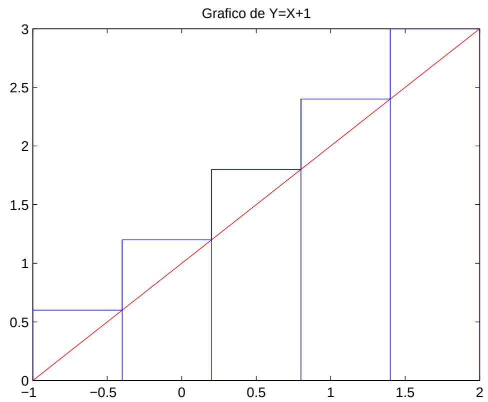
   Para $n=3$, $A(R) \approx \sum_{i=1}^{3} A(R_i) = 6$.



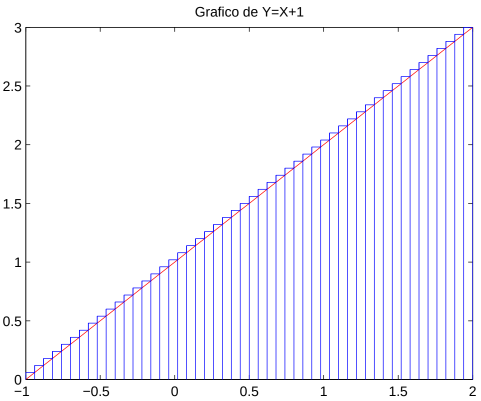
Para $n = 4$, $A(R) \approx \sum_{i=1}^{4} A(R_i) = 5,6250.$



Para $n = 5$, $A(R) \approx \sum_{i=1}^{5} A(R_i) = 5,4.$



Para $n = 50$, $A(R) \approx \sum_{i=1}^{50} A(R_i) = 4,590.$



Para $n = k$, $f(x_i) = (-1 + \frac{3i}{k}) + 1 = \frac{3i}{k}$ y

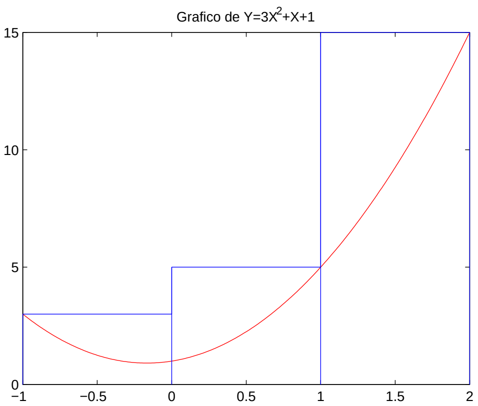
$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{k} A(R_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{3}{k} f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{9i}{k^2} = \frac{9}{k^2} \sum_{i=1}^{k} i = \frac{9}{k^2} \frac{k(k+1)}{2}.$$

Luego, $\lim_{k\to\infty} \frac{9}{2} \frac{k(k+1)}{k^2} = 4,5$.

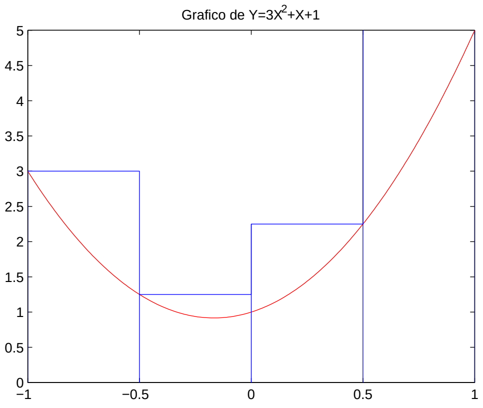
b) $f(x) = 3x^2 + x + 1$; $a = -1$ y $b = 1$.
Solución:
Podemos aproximar el área bajo la gráfica $y = 3x^2 + x + 1$ para los $-1 \leq x \leq 1$, utilizando polígonos circunscritos y considerando como:

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}| = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}, \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

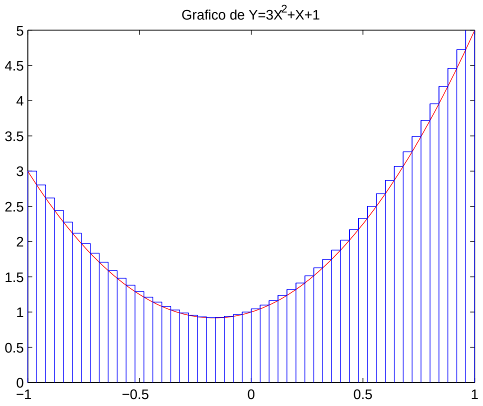
Para $n = 3$, $A(R) \approx \sum_{i=1}^{3} A(R_i) = 6,4444$.



Para $n = 4$, $A(R) \approx \sum_{i=1}^{4} A(R_i) = 5,75$.



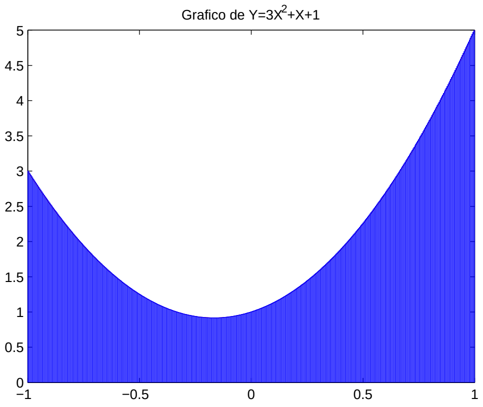
Para $n = 50$, $A(R) \approx \sum_{i=1}^{50} A(R_i) = 4,1249.$



Para $n = k$, $f(x_i) = 3(-1+\frac{2i}{k})^2 + (-1+\frac{2i}{k}) + 1 = \frac{12i^2}{k^2} - \frac{10i}{k} + 3$ y

$$\begin{aligned} A(R) &\approx \sum_{i=1}^{k} A(R_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{k} f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{24i^2}{k^3} - \sum_{i=1}^{k} \frac{20i}{k^2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{6}{k} \\ &= \frac{24}{k^3}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - 10\frac{k(k+1)}{2} + 6 \end{aligned}$$

Luego, $\lim_{k\to\infty} \frac{24}{6}\frac{k(k+1)(2k+1)}{k^3} - \frac{20}{2}\frac{k(k+1)}{k^2} + 6 = 4$. Es decir, el área exacta de la región sombreada es 4.



Para aportar cualquier sugerencia o comentario, por favor escriba a mdiaspar@usb.ve.